02-11-20

- **Η συνθήκη Lipschitz για διανύσματα:**

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $G: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D_g$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz στο σύνολο $E \subseteq D_g$ αν $\exists K (\in \mathbb{R}) \geq 0$ τ.ω.:
$\|G(t,\bar{y}) - G(t,\bar{z})\| \leq K \|\bar{y} - \bar{z}\|$, $(t,\bar{y}), (t,\bar{z}) \in E$

Παρατηρήσεις: • Για $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$ και $\|\cdot\|$ την ευκλείδια σταθμή, η συνθήκη Lipschitz γράφεται:
$\|G(t,\bar{y}) - G(t,\bar{z})\| \leq K \|\bar{y} - \bar{z}\| = K \|(y_1, \dots, y_n) - (z_1, \dots, z_n)\| = K \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2}$
• Για $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$ και $\|(y_1, \dots, y_n)\| = |y_1| + \dots + |y_n|$
η συνθήκη Lipschitz γράφεται: $\|G(t,\bar{y}) - G(t,\bar{z})\| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{z}\| =$
$= K_1 \|(y_1, \dots, y_n) - (z_1, \dots, z_n)\| = K_1 (|y_1 - z_1| + \dots + |y_n - z_n|)$
• Ισοδύναμες σταθμες: $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$.

Λήμμα: Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial g(t,y)}{\partial y_i}$, $(i = 1, \dots, n)$ είναι συνεχείς και απολύτως φραγμένες στο $E \subseteq D_g$ από τον αριθμό K, τότε η G ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $E \subseteq D_g$ με σταθερά K.

Απόδειξη: Άσκηση (σελ. 11)

Παρατήρηση: Η ύπαρξη των μερ. παραγώγων δεν είναι αναγκαία για την ισχύ της συνθήκη Lipschitz.

Πχ (Παράδειγμα 6, σελ. 26): Η συνάρτηση $F(t, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_2^2 \\ t + y_1^2 \end{bmatrix}$, $(t, \bar{y}) \in \mathbb{R}^3$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής:
$R_{a,b} = \{(t,\bar{y}) : |t - t_0| \leq a, \|\bar{y} - \bar{y}_0\| \leq b\}$.
Πράγματι, είναι $\frac{\partial F}{\partial y_1}(t, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial F}{\partial y_2}(t, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 2y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
και συνεπώς:
$\left\| \frac{\partial F(t, y_1, y_2)}{\partial y_1} \right\| \leq \sup\{\|(0, y_2)\|, (t, y_1, y_2) \in R\}$, $\left\| \frac{\partial F(t, \bar{y})}{\partial y_2} \right\| \leq \sup\{\|(y_1, 0)\|, (t, \bar{y}) \in R\}$

$\boxed{\text{Θεώρημα (1)}}$: Θεωρούμε το π.α.τ. $\bar{y}'(t)=F(t,\bar{y}(t))$, $\bar{y}(t_0)=\bar{y}_0$, όπου $F: D_F \to \mathbb{R}^{n+1}$ συνεχής στον τόπο $S \subseteq D_F \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ και $(t_0,\bar{y}_0) \in S$.
Ας είναι $a,b>0$: $R_{a,b}=\{(t,\bar{y}): |t-t_0| \leq a, \|\bar{y}-\bar{y}_0\| \leq b\} \subseteq S$.
Υποθέτουμε ότι η f πληροί την συνθήκη:
$\|F(t,\bar{y}_1)-F(t,\bar{y}_2)\| \leq K\|\bar{y}_1-\bar{y}_2\|$, $(t,\bar{y}) \in R$, για κάποιο $K(\in\mathbb{R}) \geq 0$
Τότε το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση $\bar{y}$ που ορίζεται στο διάστημα $I=[t_0-r, t_0+r]$ με $r=\min\{a, b/M\}$,
όπου $M=\sup\{\|F(t,\bar{y})\|, (t,\bar{y}) \in R\}$ (Θέτουμε $r=a$, $M=0$)
Επιπλέον, η λύση $\bar{y}$ είναι το όριο της ακολουθίας $(\varphi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ των διαδοχικών προσεγγίσεων:
$$\bar{\varphi}_0(t)=\bar{y}_0,\ \bar{\varphi}_1(t)=\bar{y}_0+\int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_1(s))\,ds, \ldots, \varphi_{n+1}(t)=\bar{y}_0+\int_{t_0}^{t} F(s,\bar{\varphi}_n(s))\,ds,\ t\in I$$
και ισχύει $\|\bar{y}(t)-\bar{\varphi}_n(t)\| \leq \dfrac{M(Kr)^{n+1}}{K(n+1)!} e^{Kr}$, $t\in I, n\in\mathbb{N}$ •

Πχ (Παράδειγμα 6, σελ. 26): Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων, το π.α.τ.: $y_1'=y_2^2$, $y_2'=t+y_1^2$, $y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$
Λύση: Παρατηρούμε ότι για $a,b>0$, η συνάρτηση:
$$F(t,y_1,y_2)=\begin{bmatrix} y_2^2 \\ t+y_1^2 \end{bmatrix},\ (t,\bar{y})\in\mathbb{R}^3$$
ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής: $R_{a,b}=\{(t,\bar{y}): |t|\leq a, \|\bar{y}\|\leq b\}$.
Επίσης, είναι: $M=\sup\{\|F(t,y_1,y_2)\|: (t,y_1,y_2)\in R\}=\{\max\{|y_2^2|,|t+y_1^2|\}: \|(y_1,y_2)\|\leq b\}$
και $M=\{\max\{y_2^2, a+y_1^2\}: |y_1|,|y_2|\leq b\}=a+b^2$
Από θεώρημα (1) έχουμε ότι το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση που ορίζεται στο διάστημα $I=[-r,r]$ με
$$r=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}=\left\{a,\frac{b}{a+b^2}\right\}\leq\left\{\frac{b}{2\sqrt{ab}}\right\}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{a}}\right\}$$
Η μέγιστη τιμή του r λαμβάνεται για:
$$a=\frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Θεώρημα (4): Αν $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας συνεχής πίνακας ~~συνάρτηση~~ και $b: I \to \mathbb{R}^n$ μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, τότε το π.α.τ.: $\bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t) + \bar{b}(t)$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$, $t, t_0 \in I$, έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα I για οποιαδήποτε τιμή του σταθερού διαστήματος $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα (5): Ας είναι $n \in \mathbb{N}$, $b, a_i \in C(I)$, $i = 0, 1, \dots, n$ με $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$ και I διάστημα της πραγματικής ευθείας, τότε η γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης:
$a_n(t)y^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t)$, $t \in I$, έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα I που πληροί τις αρχικές συνθήκες:
$y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, $y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}$ για οποιεσδήποτε σταθερές $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Παρατηρήσεις: • Ομογενείς εξισώσεις
• π.α.τ. για εξισώσεις δεύτερης τάξης
• π.σ.τ. για εξισώσεις δεύτερης τάξης
• Τροχιές λύσεων.

Πχ (Παράδειγμα 3, σελ. 24): Να αποδειχθεί ότι το π.α.τ. : $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $[-1/2, 1/2]$ και να βρεθεί μία προσέγγιση της λύση με ακρίβεια εκατοστού.

Λύση: Είναι $f(x,y) = x + y^2 \Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = 2|y|$

Ας είναι $a, b > 0$ και $R = \{|t| \leq 1/2, |y| \leq b\}$

Έχουμε $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = 2|y| \leq b$, $\sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in R\} = \frac{1}{2} + b^2$.

$$r = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{b}{\frac{1}{2}+b^2}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2b}{1+2b^2}\right\} \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2b}{1+(\sqrt{2}b)^2}\right\} \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2b}{2\sqrt{2}b}\right\} =$$
$$= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{1}{2}$$

απ' όπου με εφαρμογή του θ.1 έχουμε ότι το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση στο $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Για την ζητούμενη προσέγγιση με χρήση της ανισότητας:

$$|y(t)-\varphi_n(t)| \le \frac{M(Kr)^{n+1}}{K(n+1)!} \cdot e^{Kr}, \quad t\in I,\ n\in\mathbb{N}$$

Επιλέγοντας $b=1/\sqrt{2}$, βρίσκουμε:

$$M=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\quad K=2b=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad Kr=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-1/2}\le 1$$

και για $t\in[-1/2,1/2]$, έχουμε:

$$|y(t)-\varphi_n(t)| \le \frac{M\cdot(Kr)^{n+1}}{K(n+1)!}\cdot e^{Kr} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot e$$

απ' όπου προκύπτει ότι για την ζητούμενη προσέγγιση αρκεί να βρούμε $n\in\mathbb{N}$ τ.ω.: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot e \le \frac{1}{100} \Rightarrow 100\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e \le (n+1)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1)$

Παρατηρήστε ότι επειδή $100\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e \le 100\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e = 150\sqrt{2} \le 150\cdot\frac{3}{2} = 225$.

αρκεί $225 \le 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n+1) \Rightarrow n=5$ (είναι $6!=720$)

Επιλέγοντας: $b: \frac{1}{2} = \frac{b}{\frac{1}{2}+b^2} \Rightarrow \frac{1}{2}+b^2 = 2b \Rightarrow 2b^2-4b+1=0 \Rightarrow b=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4} \Rightarrow b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

βρίσκουμε $K=2-\sqrt{2}=M$, $Kr=(2-\sqrt{2})/2$

και η εκτίμηση για $n=2$ δίνει:

$$|y(t)-\varphi_2(t)| \le \frac{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3}{(3)!}\cdot e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{10-7\sqrt{2}}{24}\, e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}, \quad t\in I$$

Με διαδοχικές ολοκληρώσεις βρίσκουμε:

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_1(t)=\frac{t^2}{2},\quad \varphi_2(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{20},\quad t\in I$$

- **Διαφορικές Ανισώσεις πρώτης τάξης:**

Θεωρούμε την διαφορική ανίσωση: $y'(t)\le f(t,y(t)),\ t\in I$ όπου $f: I\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $y\in C^1(I_1)$ είναι λύση της διαφορικής ανίσωσης στο $I_1\subseteq I$, αν η y ικανοποιεί την ανίσωση $\forall t\in I_1$.

Πx • Η συνάρτηση $y_1(t)=\frac{1}{t}, t\geq 1$ είναι λύση της διαφορικής ανίσωσης $y'\leq -\frac{1}{3}y^2 : f(t,y(t)), t\geq 1$

Πράγματι, για $t\geq 1$ έχουμε: $y_1'(t)=-\frac{1}{t^2}\leq -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{3}y^2$

• Η συνάρτηση $y_2(t)=1, t\geq 1$ είναι λύση της διαφορ. ανίσωσης $y'\geq -\frac{1}{3}y^2, t\geq 1$

Πράγματι, για $t\geq 1$ έχουμε: $y_2'(t)=0\geq -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{3}y_2^2$

• Η συνάρτηση $y_0(t)=\frac{3}{2+t}, t\geq 1$ είναι λύση της διαφορ. ανίσωσης $y'=-\frac{1}{3}y^2, t\geq 1$

Πράγματι, για $t\geq 1$ έχουμε: $y_0'(t)=-\frac{3}{(2+t)^2}=-\frac{1}{3}\frac{9}{(2+t)^2}=-\frac{1}{3}y^2$

(Παρατηρείστε ότι $y_1(0)=y_2(0)=y_0(0)=1$)

Πρόταση: Ας είναι $f: D\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στον τόπο $D\subseteq\mathbb{R}^2$.
Αν οι συναρτήσεις y_1, y_2 ικανοποιούν τις διαφορ. ανισώσεις:
$y_1'(t)\leq f(t,y_1)$, $y_2'>f(t,y_2)$, $J=[t_0,t_0+r]$
και είναι $y_1(t_0)<y_2(t_0)$ τότε $y_1(t)<y_2(t)$, $t\in J$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η ανίσωση δεν ισχύει. Τότε το σύνολο:
$A=\{t\in J: y_1(t)\geq y_2(t)\}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε το $t^*=\inf A$.
Θα είναι: $t_0<t^*$, $y_1(t^*)=y_1(t^*)$, $y_1(t)<y_2(t)$, $t\in[t_0,t^*)$
Για $h>0$ αρκετά μικρά, θα έχουμε:
$$y_1'(t^*)=y_1'(t^*-0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{y_1(t^*+h)-y_1(t^*)}{-h}\geq\lim_{h\to 0^-}\frac{y_2(t^*+h)-y_2(t^*)}{-h}=y_2'(t^*-0)=y_2'(t$$
και $f(t^*,y_1(t^*))\geq y_1'(t^*)\geq y_2'(t^*)>f(t^*,y_2(t^*))$
που έρχεται σε αντίθεση με την $y_1(t^*)=y_2(t^*)$

Πόρισμα: Ας είναι $f: D\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στον τόπο $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις y_1, y_2 ικανοποιούν τις διαφορικές ανισώσεις:
$y_1'(t)<f(t,y_1)$, $y_2'>f(t,y_2)$, $J=[t_0,t_0+r]$

και ότι η συνάρτηση y είναι λύση του π.α.τ.:
$y'=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$, $t\in J$
Αν $y_1(t_0)\leq y_0\leq y_2(t_0)$
τότε $y_1(t)<y(t)<y_2(t)$, $t\in J$

Απόδειξη: Άσκηση.

και τις αντίστοιχες ανισώσεις:
$y_1'\leq y_1^2+x^2$, $y_2'\geq y_2^2+x^2$, $t\in[0,1]$

Πχ. Θεωρούμε το π.α.τ.: $y'=y^2+x^2$, $y(0)=1$, $t\in[0,1]$
Για την συνάρτηση $y_1(t)=1+\frac{t^3}{3}$ είναι $y_1(0)=0$ και

$$y_1'(t)=t^2<\left(1+\frac{t^3}{3}\right)^2+t^2=y_1^2(t)+t^2,\ t\in[0,1]$$

και για την συνάρτηση $y_2(t)=\tan(t+\pi/4)$ είναι: $y_2(0)=0$ και

$$y_2'(t)=\frac{1}{\cos^2(t+\pi/4)}=\tan^2(t+\pi/4)+1>y_2^2(t)+t^2,\ t\in[0,1]$$

Από το πόρισμα έπεται ότι για τη λύση y του π.α.τ. ισχύει:

$$y_1(t)=1+\frac{t^3}{3}<y(t)<\tan(t+\pi/4)=y_2(t),\ t\in[0,1]$$

Πρόταση: Ας είναι $f:D\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στον τόπο $D\subseteq\mathbb{R}^2$ και για $(x,y)\in D$ με $t_0\leq t$, $z<y$ είναι: $f(t,y)-f(t,z)\leq L(y-z)$.
Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις y_1,y_2 ικανοποιούν τις διαφ. ανισώσεις: $y_1'(t)\leq f(t,y_1)$, $y_2'\geq f(t,y_2)$, $J=[t_0,t_0+r]$
και ότι η συνάρτηση y είναι λύση του π.α.τ.: $y'=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$, $t\in J$
Αν $y_1(t_0)\leq y_0\leq y_2(t_0)$ τότε $y_1(t)\leq y(t)\leq y_2(t)$, $t\in J$

Απόδειξη: Άσκηση.